

Wechselwirkung zwischen Nukleonenbewegung und Oberflächenschwingungen der Kerne beim Kernphotoeffekt

Von A. REIFMAN*

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforschg. 8a, 505—522 [1953]; eingegangen am 6. Mai 1953)

Es wird ein Modell benutzt, bei dem die Nukleonen in einem Potentialtopf keine direkte Wechselwirkung untereinander haben, sondern die Wechselwirkung nur durch Oberflächenschwingungen des Kerns vermittelt wird. Dies bewirkt eine gleichmäßige Verteilung der Anregungsgenergie im Kern. Zunächst werden die Eigenschaften dieses Modells für nichtstationäre Probleme ausgearbeitet. Die dann folgende Anwendung des Modells auf (γ, n) -Prozesse hat zwei Hauptergebnisse: Erstens (Teil I) gestattet der Mechanismus der Kopplung mit den Oberflächenschwingungen, die für das Verständnis der (γ, n) -Prozesse wichtigen Resonanzbreiten (Lebensdauer) — in befriedigender Übereinstimmung mit dem Experiment — zu berechnen. Zweitens (Teil II) folgt aus der Vorstellung unabhängiger Nukleonen, daß die oft diskutierte Frage nach Resonanzen positiv zu beantworten ist. Die Resonanzen werden berechnet und stimmen sowohl mit den Experimenten als auch mit den phänomenologischen Modellen überein.

Teil I¹

In der bekannten Methode von Thomas-Fermi für die Behandlung von Fermion-Problemen wird angenommen, daß jedes Teilchen sich unabhängig von den anderen bewegt, und der Effekt der Wechselwirkung wird durch ein gemitteltes Feld (z. B. dargestellt durch einen Potentialtopf) ersetzt. Obwohl diese Methode für Atome sehr erfolgreich ist, wird man zunächst erwarten, daß die Anwendung auf Kerne wegen Vernachlässigung der Wechselwirkung zwischen den Nukleonen keine guten Ergebnisse liefert. Aber trotzdem hat man mit der Anwendung dieser Methode (Modell der unabhängigen Teilchen) sehr gute Erfolge erzielt. Insbesondere hat ihre Verfeinerung durch die Einführung der Spin-Bahn-Kopplung (Schalen-Modell) außerordentlich gute Ergebnisse bei der Berechnung der Grundzustände, der magnetischen Momente, des β -Zerfalls usw. geliefert. Dieses Modell setzt voraus, daß Zusammenstöße zwischen Nukleonen sehr selten sind.

Um diesen Punkt klarer zu erkennen, betrachten wir die Kernmaterie vom statistischen Standpunkt aus und fragen, ob ein Modell, in dem es wenig Zusammenstöße zwischen den Nukleonen gibt, vielleicht wegen der Fermi-Statistik besser ist, als man

anschaulich erwarten sollte². Tomonoga³ hat bei einem Fermi-Gas, bestehend aus Protonen und Neutronen, die Zähigkeit und Wärmeleitfähigkeit der Kernmaterie berechnet. Die Transportkoeffizienten werden wie üblich ausgerechnet, und er findet, daß die mittlere freie Weglänge umgekehrt proportional zum Quadrat der Temperatur ist. Bei normalen Kerntemperaturen ($T \sim 2$ MeV) bekommt man damit eine sehr große Zähigkeit. Tomonoga folgert daraus, daß für eine solche Kernmaterie jede Schwingung ($T \sim 2$ MeV) aperiodisch gedämpft sein muß. Dieses Ergebnis gilt für ein sehr großes Volumen von Kernmaterie, in dem die mittlere freie Weglänge der Nukleonen klein gegenüber den Lineardimensionen dieses Volumen ist und daher die Transportkoeffizienten ihre übliche Bedeutung haben. Im Gegensatz dazu sind die Radien fast aller Kerne bei normalen Temperaturen ($T \lesssim 2$ MeV) klein gegenüber der Weglänge, die Tomonoga ausgerechnet hat, und das Proton-Neutron-Gas muß daher mehr als ein „Knudsen-Gas“ betrachtet werden, in dem hauptsächlich nur Zusammenstöße mit der Gefäßwand stattfinden.

Die mittlere freie Weglänge für ein Fermi-Gas bei tiefen Temperaturen ist nämlich viel größer als der klassische Wert $\lambda \sim 1/NQ$. Wegen des Pauli-Prinzips

dieses Modells für stationäre Probleme untersucht (Kernmomente), wird hier die Anwendung auf nicht stationäre Fälle ausgearbeitet (Kernphotoeffekt).

² V. Weißkopf, Science 113, 101 [1951].

³ S. Tomonoga, Z. Physik 110, 573 [1938].

* Ann Arbor, Michigan, USA.

¹ Während des Entstehens dieser Arbeit wurde in einer Veröffentlichung von A. Bohr, Dan. Mat. Fys. Medd. 26, No. 14 [1952], ein Modell eingeführt, das im Prinzip dieselben Züge aufweist, wie das von uns in Teil I behandelte. Während Bohr die Eigenschaften



können nur solche Nukleonen zusammenstoßen, die sich in Zuständen des Schwanzes der Fermi-Verteilung befinden, und sie können dabei nur in Zustände der gleichen Art übergehen. Der Teil des Impulstraumes, der dem Schwanz entspricht, ist eine Kugelschale vom Radius (P_{\max}) und der Dicke (ΔP). Die mittlere freie Weglänge wird daher nach Tomonoga größenzahlmäßig:

$$\lambda_{\text{F. B.}} \sim \frac{1}{N Q \left(\frac{\Delta P}{P_{\max}} \right)^2} \sim \lambda_{\text{klass.}} \left(\frac{E_{\max}}{k T} \right)^2.$$

Nach Tomonoga ist der effektive Stoßquerschnitt für Impulstransport, der für die Zähigkeit maßgebend ist, $Q \approx 0,01$ barn. Für normale Kerntemperaturen ($T \sim 2$ MeV, starke Entartung) ist die Weglänge daher immer größer als die Kerndimensionen und wird am absoluten Nullpunkt unendlich groß (für $T \sim 2$ MeV größenzahlmäßig $\lambda \sim 10 \cdot 10^{-13}$ cm).

In Wirklichkeit sind im Falle des entarteten Gases auch am absoluten Nullpunkt nicht genau alle Zustände bis zum Maximalimpuls besetzt. Die gegenseitige Wechselwirkung der Teilchen untereinander erzeugt Übergänge von Zuständen unterhalb des Maximalimpulses zu Zuständen oberhalb des Maximalimpulses und verschmiert daher die Impulskugel in der Nähe des Maximalimpulses. Dieser Effekt wurde von Watanabe⁴ untersucht, und es

- hat sich dabei gezeigt, daß diese Verschmierung für manche Zwecke als eine „Temperatur“ von der Größenordnung 4 bis 7 MeV interpretiert werden kann. In Wirklichkeit ist diese Temperatur wahrscheinlich noch zu hoch. Aber auch mit dieser Temperatur hätte die mittlere freie Weglänge noch die Größenordnung der Kernradien.

Wir sehen also, daß das Modell der unabhängigen Teilchen auf niedrig angeregte Kerne anwendbar ist. Das bedeutet auch, daß die Nukleonen häufiger mit der Kernoberfläche als untereinander zusammenstoßen, d. h. eine Art „Knudsen-Gas“ bilden. Nach diesen Überlegungen wird die Wechselwirkung zwischen den Nukleonen im wesentlichen durch die Kernoberfläche vermittelt. Ähnliche Verhältnisse liegen z. B. für das Fermi-Gas der Metallelektronen vor, wenn man eine dünne Metallplatte betrachtet, deren Durchmesser nur einige Gitterabstände beträgt.

Wir führen nun ein Modell ein, das diesen Ergebnissen gerecht wird. Wir benutzen ein Potentialtopf-

Modell, bei dem im Innern des Potentialtopfes auf die Nukleonen keine Kräfte ausgeübt werden (Modell der unabhängigen Teilchen). Allein die Oberflächenschwingungen der Kerne können auf die Nukleonen Kräfte übertragen. Die Schwingungen der Kernoberfläche sind nichts anderes als die von Bohr und Wheeler studierten Oberflächenschwingungen.

Wir haben in unserem Modell zwei verschiedene und scheinbar entgegengesetzte Standpunkte verknüpft. Der eine ist das Modell der unabhängigen Teilchen, wo die Wechselwirkung zwischen den Nukleonen vernachlässigt wird, und der andere ist das Bohrsche Tröpfchen-Modell. Die Wechselwirkung zwischen den beiden Arten von Freiheitsgraden wird durch die Kopplung der Nukleonen mit der Oberfläche dargestellt.

Mit dem Modell der unabhängigen Teilchen allein können wir die schnelle Einstellung der Gleichverteilung zwischen allen Nukleonen-Freiheitsgraden nicht erklären. Aber durch die Wechselwirkung der Nukleonen mit den Oberflächenschwingungen ergibt sich das sofort. Die Oberflächenschwingungen verteilen die Energie der Kernbewegung auf alle Nukleonen-Freiheitsgrade, wie in der Blochschen Theorie der Metallelektronen durch die Gitterschwingungen geordnete Elektronenbewegungen in ungeordnete umgewandelt werden.

Wir haben gerade bemerkt, daß eine gewisse Analogie zwischen diesem Modell und den Elektronen im Metall besteht, aber es gibt einen sehr wichtigen Unterschied. Im Metall sind die Gitterschwingungen durch das Gitter gegeben und in erster Näherung unabhängig von den Elektronen. Aber in diesem Modell röhren die Oberflächenschwingungen von der makroskopischen Fermi-Gasbewegung her, die man durch ein Geschwindigkeitspotential beschreibt. Die Beziehung zwischen dieser makroskopischen Bewegung und der mikroskopischen Bewegung der Nukleonen kann man mit der Fermi-Verteilung (f) schreiben:

$$v_{\text{makro}} = \frac{1}{\varrho} \int \xi_i f d\xi_i.$$

Es ist also die makroskopische Geschwindigkeit v_{makro} , die für die Oberflächenschwingungen verantwortlich ist, eine Mittelung über die Nukleongeschwindigkeiten ξ_i . Die Wechselwirkung dieser Schwingungen mit den Nukleonen stellt eine Art Selbstenergie dar.

Dieses Modell kann auf verschiedene Probleme der Kernphysik angewandt werden¹, z. B. auf die

⁴ S. Watanabe, Z. Physik 113, 482 [1939].

Berechnung der Lebensdauer angeregter Zustände, die zu den verschiedenen Kernreaktionen gehören. Wir wollen es hier auf das Problem der (γ, n) -Reaktion anwenden, das vor kurzem viel diskutiert wurde besonders in bezug auf die Frage, ob dieser Prozeß ein Resonanzeffekt ist. Weiter wollen wir versuchen, die Dämpfung (Resonanzbreite) mit Hilfe dieses Modells zu erklären.

Diese Arbeit besteht aus zwei Teilen. Im ersten Teil wird das Modell ausgearbeitet und die Lebensdauer eines Nukleonenzustandes aus den Oberflächenschwingungen berechnet. Hierzu wird eine Quantisierung der Oberflächenschwingungen ausgeführt und die Wechselwirkung der Nukleonen mit diesen Schwingungen betrachtet.

Im zweiten Teil wird das Modell auf die (γ, n) -Prozesse angewandt und der γ -Querschnitt ausgerechnet, wobei sich der beobachtete Resonanzeffekt ergibt.

1. Oberflächenschwingungen

Zur Behandlung des wohlbekannten Problems der Schwingungen eines inkompressiblen Flüssigkeitströpfchens vom Radius R folgen wir der üblichen Methode^{5, 6, 7}, die darin besteht, daß das Geschwindigkeitspotential Φ und die Radikaldeformationen $\delta(r)$ zunächst nach Kugelfunktionen entwickelt werden.

$$\Phi = \sum_{l,m} \beta_{lm} r^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (1)$$

$$\delta(r) = r - R = \sum_{l,m} \alpha_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi); \quad (2)$$

hierbei gilt $\dot{\alpha}_{lm} = l \beta_{lm} R^{l-1}$.

Die kinetische und potentielle Energie des Tröpfchens läßt sich durch die Entwicklungskoeffizienten ausdrücken, und man erhält als Hamilton-Funktion

$$H = \sum_{l,m} \frac{\mu}{2} \left[\frac{\dot{\alpha}_{lm}}{\sqrt{l}} \frac{\dot{\alpha}_{lm}^*}{\sqrt{l}} + \omega_l^2 \frac{\alpha_{lm}}{\sqrt{l}} \frac{\alpha_{lm}^*}{\sqrt{l}} \right]. \quad (3)$$

Hierbei ist $\mu = \rho R^3 = \frac{A M}{4/3 \pi}$; ρ = Dichte; M = Masse; A = Nukleonenzahl,

$$\omega_l = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho} \frac{l(l-1)(l+2)}{R^3}}, \quad (4)$$

σ = Oberflächenspannung.

Nach dem Übergang zur Quantenmechanik bestehen die bekannten Vertauschungsrelationen:

⁵ H. A. Bethe, Rev. mod. Physics 9, 86, 223 [1937].

⁶ S. Flügge, Ann. Physik 39, 373 [1943].

⁷ M. Nogami, Prog. Theor. Physics 3, 363 [1948].

$$[\alpha_{lm}, \dot{\alpha}_{l'm}^*] = [\dot{\alpha}_{lm}^*, \alpha_{l'm}] = i \hbar \frac{\sqrt{ll'}}{\mu} \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (5)$$

Nach Einführung neuer kanonischer Variablen durch die Transformation

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{lm}}{\sqrt{l}} &= \sqrt{\frac{\hbar}{\mu \omega_l}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{lm} + a_{-l-m}^*), \\ \frac{\dot{\alpha}_{lm}}{\sqrt{l}} &= \sqrt{\frac{\hbar \omega_l}{\mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{lm}^* - a_{-l-m}), \end{aligned} \quad (6)$$

nimmt die Hamilton-Funktion folgende Form an:

$$H = \sum_{l,m} \hbar \omega_l (a_{lm}^* a_{lm} + \frac{1}{2}), \quad (7)$$

wo die a, a^* die Rolle von Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren spielen. Wir können die Oberflächendeformation jetzt in folgender Form ausdrücken:

$$\delta(r) = \sum_{l,m} \sqrt{\frac{l \hbar}{2 \mu \omega_l}} [a_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) + a_{lm}^* \bar{Y}_{lm}(\vartheta, \varphi)]. \quad (8)$$

Die Knotenzahlen l, m sind mit dem Drehimpuls verknüpft. Dies findet man leicht durch die übliche Methode, wenn man den Drehimpuls des Tröpfchens als Integral über das Volumen ausdrückt.

$$\vec{M} = \int_v [\vec{r} \times \vec{p}] d\tau, \quad (9)$$

worin der Impuls $p = \rho v$ mit $v = \text{grad } \Phi$. Wegen der Inkompressibilität des Volumens ($\text{div } v = 0$ und $\text{rot } v = 0$) verschwindet in dem obigen Ausdruck das Integral über das ungestörte Volumen und nur das Gebiet zwischen R und $R + \delta(r)$, also nur die Oberfläche, liefert einen Beitrag zum Drehimpuls des Tröpfchens.

Mit Hilfe der früheren Entwicklung lassen sich jetzt die üblichen Operatoren für die Behandlung des Drehimpulses — M^2 und M_z — durch die Größen a, a^* ausdrücken. In dem Spezialfall, daß nur eine Schwingung l, m angeregt ist, kann man M^2 wie folgt schreiben:

$$M^2 = \hbar^2 \sum_{l,m} l(l+1) a_{lm}^* a_{lm} = \hbar^2 \sum_{l,m} l(l+1) N_{lm}. \quad (10)$$

Wenn man die Bedingung weiter spezialisiert, so daß der Zustand l, m nur mit einem Quant besetzt ist, nehmen die Operatoren M_z und M^2 die Gestalt der normalen Drehimpulsoperatoren an:

$$M_z = \hbar m, \quad M^2 = l(l+1) \hbar^2. \quad (11)$$

Wir sehen also, daß die Oberflächenquanten (Bosonen) nur dann in einfacher Weise Zustände von Drehimpulsen darstellen, wenn lediglich ein Quant

im Zustand l, m vorhanden ist. (Dann verhalten sich l und m wie Eigenwerte der Drehimpuls-Operatoren.)

Diese Interpretationen werden wir später benutzen, um die Oberfläche durch Zustände von Drehimpulsen zu charakterisieren. Wir werden nur solche Fälle betrachten, bei denen die obige Bedingung erfüllt ist, d. h. wir beschränken uns auf den Fall schwacher Kopplung.

2. Wechselwirkungsenergie

Wir wollen jetzt die Wirkung der Oberflächenschwingungen im Modell der unabhängigen Teilchen untersuchen. Durch die Oberflächenschwingungen wird die Randbedingung der Schrödinger-Gleichung geändert; das bedeutet eine Störung der Wellenfunktionen und der Eigenwerte. Diese Änderung der Eigenwerte gibt die gesuchte Wechselwirkungsenergie zwischen einem Teilchen und den Oberflächenschwingungen.

Die Störungs-Energie ist natürlich abhängig von der Form des Potentials, das wir für die unabhängigen Teilchen ansetzen. Für unsere Rechnung nehmen wir der Einfachheit halber einen zunächst kugelförmigen Potentialtopf vom Radius R mit unendlich hohen, d. h. undurchdringlichen Wänden an. Für einen solchen Topf wird die Grenzbedingung sehr einfach: die Wellenfunktion muß am Rand verschwinden. Die Lösung der Einteilchen-Schrödinger-Gleichung gibt in diesem Fall

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r) \cdot Y(\vartheta, \varphi),$$

wobei $R(kr) = N J_{l+\frac{1}{2}}(kr)$, $J_{l+\frac{1}{2}}(kr) = 0$.

Die Eigenwerte sind gegeben durch die Nullstellen der halbzahligen Bessel-Funktionen.

Berücksicht man die Oberflächenschwingungen, so verändern sich die Eigenwerte, außerdem werden, wenn die Schwingungen nicht als unendlich langsam aufgefaßt werden können, Übergänge hervorgerufen.

Wegen der Oberflächenschwingungen müssen die Wellenfunktionen $\psi(r, \vartheta, \varphi)$ jetzt auf einem neuen zeitlich veränderlichen Rand verschwinden. Statt $\psi = 0$ für $r = R$ schreiben wir jetzt:

$$\psi = 0, \quad r = R + \lambda \delta(r),$$

⁸ L. Brillouin, C. R. hebd. Séances Acad. Sci. **204**, 1863 [1937].

⁹ Es hat zunächst den Anschein, als ob bei Anwendung dieses Operators auf die Wellenfunktionen eine

wo $\delta(r)$ nach Kugelflächenfunktionen entwickelt ist und die Radialverschiebung von der ungestörten Grenze R darstellt. Die Verschiebung $\lambda \cdot \delta(r)$ wird als infinitesimal betrachtet.

Wir benutzen eine von Brillouin⁸ angegebene Methode zur Behandlung einer Schrödinger-Gleichung mit gestörter Randbedingung. Hierzu führen wir einen Operator S ein, der eine Verschiebung der Wellenfunktion von der ursprünglichen Grenze R zu der deformierten Grenze $R + \lambda \delta(r)$ bewirkt. S ist nicht singulär, so daß S^{-1} existiert. Durch diese Transformation werden wir das Problem in eine Form bringen, in der wir es mit der normalen Schrödingerschen Störungstheorie behandeln können.

Wir definieren den Verschiebungsoperator so⁹, daß

$$S = 1 + \lambda \delta(r) \frac{\partial}{\partial r} + \lambda^2 \frac{\delta(r)^2}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^2 + \dots \quad (12)$$

Durch Benutzung dieses Operators läßt sich die Störung der Grenze auf eine Störung der Hamilton-Funktion zurückführen.

Diese Störung

$$H' = S^{-1} H_0 S - H_0 \quad (13)$$

entspricht der Wechselwirkungsenergie der Teilchen mit der Oberfläche.

Man kann jetzt die gewöhnliche Schrödingersche Störungstheorie anwenden und findet in *erster Näherung* für die Matrixelemente der Störung,

$$H'_{k'k} = \int_v \psi_{k'}^* [H_0, S_1] \psi_k d\tau \quad \text{mit } S_1 = \delta(r) \frac{\partial}{\partial r}. \quad (14)$$

Dieser Ausdruck läßt sich mit Hilfe des Greenschen Theorems umformen,

$$H_{k'k} = (E_{k'} - E_k) \int_v \psi_{k'}^* S_1 \psi_k d\tau - \frac{\hbar^2}{2\mu} \int_F (S_1 \psi_k) \frac{\partial \psi_{k'}^*}{\partial n} d\Gamma. \quad (15)$$

Mit Benutzung der expliziten Form des Operators S_1 nehmen die Diagonalelemente folgende Gestalt an:

$$H'_{kk} = \frac{2}{R} \frac{\hbar^2 k^2}{2M} \int_F Y(\vartheta, \varphi) \delta(r) Y(\vartheta, \varphi) d\Gamma \quad (16)$$

wo $\hbar^2 k^2 / 2M = E$ der Eigenwert des ungestörten Problems ist.

Für die Nicht-Diagonalelemente folgt

Singularität am Ursprung entsteht. Eine genauere Beobachtung mit Hilfe einer Glättungsfunktion zeigt jedoch, daß sich dieser Umstand nicht auf die Resultate auswirkt.

$$\begin{aligned}
H'_{k'k'} &= (E_{k'} - E_k) \int_0^R R(k'r) \frac{d}{dr} R(kr) r^2 dr \\
&\quad \cdot \int_F Y_{k'}(\vartheta', \varphi') \delta(r) Y_k(\vartheta, \varphi) d\vartheta d\varphi \\
&\quad - \frac{2}{R} \frac{\hbar^2 k k'}{2M} \int_F Y_{k'}(\vartheta', \varphi') \delta(r) Y_k(\vartheta, \varphi) d\vartheta d\varphi \quad (17)
\end{aligned}$$

und mit Hilfe der asymptotischen Entwicklung erhält man näherungsweise

für $(l \pm l')$ ungerade

$$H'_{k'k'} = - \frac{4}{R} \frac{\hbar^2 k k'}{2M} \int_F Y_{k'}(\vartheta', \varphi') \delta(r) Y_k(\vartheta, \varphi) d\vartheta d\varphi$$

für $(l \pm l')$ gerade

$$\begin{aligned}
H'_{k'k'} &= - \left[2(-1)^{n'+n} - (-1)^{\frac{l'+l}{2}} \right] \\
&\quad \cdot \frac{2}{R} \frac{\hbar^2 k k'}{2M} \int_F Y_{k'}(\vartheta', \varphi') \delta(r) Y_k(\vartheta, \varphi) d\vartheta d\varphi.
\end{aligned}$$

Im folgenden betrachten wir einfachheitshalber den Fall, wo der erste Term auf der rechten Seite von Gl. (17) verschwindet, und später erst führen wir den Faktor ein, der durch l, l' und n, n' bedingt ist.

3. Übergangswahrscheinlichkeiten

Nachdem die Wechselwirkungsenergie ausgewertet ist, können wir die Quantisierung der Gesamt-Hamilton-Funktion vornehmen. Diese besteht aus der Hamilton-Funktion für ein Einzel-Nukleon im Potentialtopf (H_T), der Oberflächen-Hamilton-Funktion (H_F) und der Wechselwirkungs-Hamilton-Funktion (H'):

$$H_T = \frac{\hbar^2}{2M} \int_V \psi^* \Delta \psi d\tau, \quad (18)$$

$$H_F = \frac{\mu}{2} \sum_{l,m} \left(\frac{\dot{\alpha}_{lm}}{\sqrt{l}} \cdot \frac{\dot{\alpha}_{lm}^*}{\sqrt{l}} + \omega_l^2 \frac{\alpha_{lm}}{\sqrt{l}} \cdot \frac{\alpha_{lm}^*}{\sqrt{l}} \right), \quad (19)$$

$$H' = \sum_{k'} \frac{2}{R} \frac{\hbar^2 k k'}{2M} \int_F \psi^*(\vartheta', \varphi') \delta(r) \psi(\vartheta, \varphi) d\vartheta d\varphi. \quad (20)$$

Der einzelne Summenterm von H' stellt die Wechselwirkung zwischen einem Nukleon und der Oberfläche dar. Er ist proportional dem Impuls im Anfangszustand k und im Endzustand k' des betreffenden Nukleons und enthält als zweiten Faktor ein Integral, in dem die Koordinaten der Oberfläche und die Wellenfunktion des Nukleons auftreten. Die Wechselwirkung entsteht durch den Austausch von

Drehimpuls zwischen dem Nukleon und der Oberfläche.

Die Einführung dieser Kopplung zwischen Nukleon und Oberfläche scheint zuerst etwas problematisch, da es schließlich die Nukleonen selbst sind, die die Oberflächenschwingungen erzeugen. Jedoch entsteht die Oberflächenschwingung nicht durch die Bewegung eines *einzelnen Teilchens*, sondern durch die *gemittelte Bewegung aller Teilchen*, wie in der Einleitung diskutiert wurde. Unser Bild steht demnach ungefähr in Analogie zu der Hartreeschen Methode in dem Sinne, daß die Teilchen in Wechselwirkung mit einem gemittelten Feld treten. Von diesem Standpunkt aus ist die Einführung einer solchen Kopplung plausibel.

In Abschn. 1 wurde gezeigt, daß das quantisierte H_F formal identisch ist mit der Energie einer Gesamtheit freier Bosonen

$$H_F = \sum_{l,m} \hbar \omega_l \left(N_{lm} + \frac{1}{2} \right), \quad \text{wo } N_{lm} = a a^*. \quad (21)$$

H_T wurde bis jetzt nicht in quantisierter Form diskutiert, aber es ist klar, daß die Quantisierung solch einer Hamilton-Funktion zu einer Fermionen-Gesamtheit führt mit antivertauschbaren Operatoren b, b^* . Die ψ 's in Gl. (18) werden dann nach stationären Wellenfunktionen mit den b 's als Koeffizienten entwickelt:

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_l b_l(t) u_l(r, \vartheta, \varphi), \quad (23)$$

$$\psi^*(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l'} b_{l'}^*(t) u_{l'}(r, \vartheta, \varphi). \quad (24)$$

Für die b 's gelten die Anti-Vertauschungsrelationen:

$$[b_l, b_{l'}]_+ = [b_l^*, b_{l'}^*]_+ = 0, \quad [b_l, b_{l'}^*] = \delta_{ll'}. \quad (25)$$

Den quantisierten Ausdruck für die Nukleon-Hamilton-Funktion kann man dann in der wohlbekannten Form schreiben:

$$H_T = \sum_l b_l^* b_l E_l = \sum_l N_l E_l. \quad (26)$$

Wie früher die Operatoren (a, a^*) , sind jetzt die (b, b^*) „Erzeugungs“- und „Vernichtungs“-Operatoren, die auf die Zustandsvektoren

$$\Psi(l_1 \dots l_k \dots) \quad (27)$$

wirken, wo die l 's die Quantenzahlen der besetzten Nukleon-Zustände sind.

Unter Benutzung der Entwicklungen Gl. (23), (24) und des quantisierten Ausdrucks für $\delta(r)$, Gl. (8), erhalten wir für den Wechselwirkungsanteil der Hamilton-Funktion Gl. (20):

$$H' = \sum_{k'} \frac{2}{R} \frac{\hbar^2 k k'}{2M} \cdot \sum_{L, M} \sqrt{\frac{L \hbar}{2 \mu \omega_L}} \int_{\mathbf{F}} b_l^* \bar{u}_{lm}(\vartheta, \varphi) [a_{LM} Y_{LM} + a_{LM}^* Y_{LM}] \cdot b_{l'} u_{l'm'}(\vartheta', \varphi') d\Omega, \quad (28)$$

wo wir jetzt die Drehimpulse der Oberflächenquanten, Gl. (11), mit L, M bezeichnen und l, m für die Nukleonen-Zustände benutzen.

Damit haben wir die gesamte quantentheoretische Hamilton-Funktion angegeben. Die Wechselwirkung H' enthält Glieder mit den a 's und b 's.

Explizit können wir Ψ als Produkt von Fermionen- und Bosonen-„Funktionalen“ schreiben. Formal sieht das Problem der Wechselwirkung zwischen Nukleonen und Oberflächenschwingungen hier fast genau so aus, wie das der Wechselwirkung zwischen Elektronen und Gitterschwingungen im Metall.

Die Matrix-Elemente der zeitabhängigen Störungstheorie für Übergänge des Gesamtsystems erhält man aus Gl. (28) durch Wirkung der a 's und b 's auf die Zustandsvektoren mit Benutzung der Operator-Eigenschaften und der Orthogonalitäts-Bedingung.

Für einen Absorptionsprozeß beschreiben wir den Anfangszustand durch $\Psi(n_{LM}, l)$ und den Endzustand durch $\Psi(n_{LM} - 1, l')$. Ψ ist jetzt ein Zustand des Gesamtsystems mit n_{LM} Oberflächenquanten im Zustand L, M und einem Nukleon im Zustand l . Andere Quanten und Nukleonen sind auch vorhanden, nehmen aber nicht an diesem Prozeß teil. Der Absorptionsprozeß besteht aus der Vernichtung eines Oberflächenquants im Zustand L, M , der Vernichtung eines Nukleons im Zustand l , und der Erzeugung eines Nukleons im Zustand l' . Wenn wir jetzt H' auf diese Anfangs- und Endzustandsvektoren anwenden, erhalten wir für die Matrixelemente der Absorption:

$$H'_{ll'} = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{L \hbar}{2 \mu \omega_L}} \sqrt{n_{LM}} \cdot C(l, m; L, M; l', m'), \quad (29)$$

wo C die Wechselwirkungsenergie zwischen der Oberfläche und den Nukleonen bedeutet. Es ist

$$C = \frac{\hbar^2 k k'}{2M} \int_{\mathbf{F}} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) Y_{LM}(\Theta, \Phi) Y_{l'm'}(\vartheta', \varphi') d\Omega. \quad (30)$$

Für einen Emissionsprozeß beschreiben wir den Anfangszustand durch $\Psi(n_{LM}, l')$ und den Endzustand durch $\Psi(n_{LM} + 1, l)$. Hier besteht der Prozeß aus der Erzeugung eines Oberflächenquantes im Zustand L, M , der Vernichtung eines Nukleons im Zustand l' und der Erzeugung eines Nukleons im Zustand l . Für diese Emissions-Matrixelemente erhalten wir:

$$H'_{l'l} = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{L \hbar}{2 \mu \omega_L}} \sqrt{n_{LM} + 1} \cdot C(l, m; L, M; l', m'). \quad (31)$$

Wir wollen zunächst die obenstehenden Matrixelemente genauer betrachten. Hierzu muß das in der Wechselwirkungsenergie enthaltene Integral

$$g = \int_{\mathbf{F}} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) Y_{LM}(\Theta, \Phi) Y_{l'm'}(\vartheta', \varphi') d\Omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\pi P_l^m P_L^{m' - m} P_{l'}^{m'} \sin \vartheta d\vartheta \quad (32)$$

ausgeführt werden. Dies ist in verschiedener Weise möglich^{10, 11}. Wir stellen die Ergebnisse dieser Integration zusammen. Man erhält zwei Auswahlregeln, die der Erhaltung von Drehimpuls und Parität entsprechen:

$$|L - l| \leq l' \leq |L + l|,$$

$$L + l + l' = 2\alpha \quad (\alpha \text{ ganze Zahl}).$$

Für das Integral selbst ergibt sich folgender Ausdruck (Gauntsche Formel)¹²:

$$g(l, m; L, M; l', m') = \frac{(-1)^\alpha - L - m (2\alpha - 2l)! \alpha!}{\sqrt{2\pi} (\alpha - L)! (\alpha - l)! (\alpha - l')! (2\alpha + 1)!} \cdot \sqrt{\frac{(2L + 1)(2l + 1)(2l' + 1)(l' - m')! (L + m' - m)! (l + m)! (l - m)!}{2(l' + m')! (L - m' + m)!}} \cdot \sum (-1)^\nu \frac{(l' + m' + \nu)! (L + l - m' - \nu)!}{(l' - m' - \nu)! (L - l + m' + \nu)! (l - m - \nu)! \nu!}. \quad (33)$$

¹⁰ L. Infeld u. T. E. Hull, Rev. mod. Physics **23**, 21 [1951].

¹¹ J. A. Gaunt, Trans. Roy. Soc. Canada, Sect. A **228**, 151 [1929].

¹² Vgl. Anm. 11, Gl. 25.

Diese Funktion kann nur für spezielle Werte berechnet werden, für praktische Zwecke sind Tabellen notwendig. Numerische Werte für diese Funktion sind (bis auf einen Normierungsfaktor) von Condon-Shortley für kleine Werte von l, l', L tabelliert worden¹³. Die Kopplungsenergie hat jetzt folgende Form:

$$C = \frac{\hbar^2 k k'}{2 M} \cdot g(l, m; L, m' - m; l', m'). \quad (34)$$

Aus den Matrixelementen, Gl. (31), können wir jetzt mit der zeitabhängigen Störungsrechnung die Lebensdauer eines Nukleonenzustandes berechnen. Für die partielle Breite eines Zustandes, die der Wahrscheinlichkeit für spontane Emission eines Oberflächenquantes entspricht, bei der das Nukleon von $l' \rightarrow l$ geht, erhält man

(35)

$$\Gamma_{ll} = \frac{4 \pi}{R^2} \cdot \frac{L \varrho(\omega_L)}{\mu \omega_L^{2/3}} \cdot |C(l, m; L, m - m'; l', m')|^2.$$

Diese Formel setzt voraus, daß die Dichte der Zustände L, M sich einem Kontinuum annähert. Diese Bedingung ist allerdings nur näherungsweise erfüllt: Erstens ist die Dichte der Frequenzen $\varrho(\omega_L)$ praktisch nur für schwere Kerne kontinuierlich, nicht aber für leichte Kerne, zweitens beschränken die Auswahlregeln die Anzahl der erreichbaren Zustände L, M .

Die Dichte der Oberflächen-Frequenzen $\varrho(\omega_L)$ ist bei Bethe⁵ (für große L) angegeben:

$$\varrho(\omega_L) = \frac{3}{4} R^2 \omega_L^{1/3} \cdot \left(\frac{\varrho}{\sigma}\right)^{2/3}. \quad (36)$$

Wir erhalten also für die „partielle Breite“:

$$\Gamma_{ll} = \frac{8 \pi}{3} \frac{L C^2}{\mu \omega_L^{2/3}} \cdot \left(\frac{\varrho}{\sigma}\right)^{2/3}. \quad (37)$$

Diesen Ausdruck, Gl. (37), können wir übersichtlicher schreiben, indem wir in der Kopplungsenergie Gl. (35) $\hbar^2 k k' / 2 M$ durch die Fermische Grenzenergie ersetzen, d. h. durch $E_{\max} \approx 21$ MeV. Mit Einsetzen der Werte für μ , [Gl. (3)], ω_L [Gl. (4)] und des Mittelwertes von g^2 erhalten wir

$$\Gamma_{ll} \approx \frac{64 \pi^2}{3} \cdot \frac{E_{\max}^2 \bar{g}^2}{G} \text{ MeV}. \quad (38)$$

Die Gesamtbreite eines Nukleonenzustandes l' erhält man dadurch, daß man die partiellen Breiten

über alle möglichen (niedriger liegenden) Zustände summiert:

$$\Gamma_l = \sum_{l' < l} \Gamma_{ll'}.$$

Die Gesamtbreite eines Nukleonüberganges $l' \rightarrow l$ ist die Summe der Breiten des individuellen Niveaus

$$\Gamma = \Gamma_l + \Gamma_{ll'}.$$

Wir sehen, daß die Ausrechnung der Gesamtbreiten schon infolge der verschiedenen Summation über die l sehr komplizierte Ausdrücke ergibt. Wir werden uns auf die Partialbreite, Gl. (37), beschränken.

Die Abhängigkeit der Breite Γ_{ll} von A ist in den Termen \bar{g}^2 und G enthalten. Die Oberflächenenergie $G \sim A^{2/3}$ sorgt dafür, daß die Dämpfung mit $A^{-2/3}$ abnimmt. Der Kopplungsterm g hängt von L, l, l' in einer unübersichtlichen Weise ab [Gl. (33)], nimmt jedoch mit A etwas zu, so daß die Gesamtabhängigkeit der Γ_{ll} vom A im einzelnen nicht zu übersehen ist; sie nehmen etwas schwächer als $A^{-2/3}$ ab. Man kann aber diesen Ausdruck grob numerisch abschätzen für bestimmte Werte von g , wenn man Werte aus der Tabelle von Condon und Shortley¹³ benutzt. Man erhält z. B. für $l' \rightarrow l \equiv f \rightarrow p$ und ähnliche Übergänge einen Wert $\bar{g}^2 \lesssim 0,10$. Dies ergibt eine Breite von der Größenordnung $\lesssim 20$ MeV und entspricht größenordnungsmäßig den betrachteten Breiten im (γ, n) -Prozeß (4–6 MeV)^{14, 15, 16}. Wenn man \bar{g}^2 aus den experimentellen Werten bestimmt, erhält man $\bar{g}^2 \sim 0,02$.

Nach diesem Modell wird man erwarten, daß die Breite der (γ, n) -Resonanz durch die Kopplung der Nukleonen mit der Oberfläche entsteht; d. h. die vom elektromagnetischen Feld herrührende geordnete Bewegung wird durch Vermittlung der Oberfläche in ungeordnete umgewandelt. Es ist möglich, daß die betrachteten Breiten nicht vollständig der Dämpfung entsprechen, sondern daß ein Teil von einem anderen Effekt herröhrt (s. Teil II).

Obwohl wir (wegen der komplizierten Form von g) die Dämpfung nur größenordnungsmäßig abschätzen können, haben wir doch durch die Berechnung ein besseres Verständnis für den Mechanismus der Dämpfung und der Einstellung der Gleichverteilung

¹³ E. U. Condon u. G. H. Shortley, The Theory of Atomic Spectra, Cambridge University Press 1951, S. 178.

¹⁴ M. Goldhaber u. E. Teller, Physic. Rev. 74, 1046 [1948].

¹⁵ J. H. D. Jensen u. H. Steinwedel, Z. Naturforschg., 5a, 413 [1950].

¹⁶ J. S. Levinger u. H. A. Bethe, Physic. Rev. 78, 115 [1950].

im Kern durch Emission und Absorption von Oberflächenquanten erhalten.

Die Dämpfung läßt sich auch in einer sehr anschaulichen Weise abschätzen. Die Breite Γ ist die reziproke Lebensdauer zwischen zwei Zusammenstößen. Also wird für unser Modell (entartetes Fermi-Gas):

$$\frac{\Gamma}{2} \approx \frac{\hbar \bar{v}}{\tau} = \frac{\hbar \bar{v}}{\lambda} \cdot f = \frac{\hbar^2 k}{M \lambda} \cdot f, \quad (39)$$

wo f die Wahrscheinlichkeit ist, daß ein Nukleon in einem Stoß mit der Oberfläche seine Energie abgibt und λ die freie Weglänge im Kern ist, die, wie wir früher gezeigt haben, ungefähr gleich dem Kernradius ist. Wir setzen $k \sim k_{\max}$, $\lambda \sim R$ und erhalten (E in MeV):

$$\frac{\Gamma}{2} \approx 3 f \sqrt{E_{\max}} A^{-\frac{1}{3}}. \quad (40)$$

Aus diesem sehr anschaulichen Beispiel folgt, daß $\Gamma \sim A^{-\frac{1}{3}}$ ist. Weiter können wir die Stoßwahrscheinlichkeit f größenordnungsmäßig festlegen mit Benutzung der experimentellen Werte. Unter der Annahme, daß die betrachteten Breiten (4–6 MeV) vollständig der eben erörterten Art der Dämpfung entsprechen, wird dann $f \approx 0.3$.

Teil II

Im Teil I haben wir das Modell der unabhängigen Teilchen diskutiert, in dem die Wechselwirkung zwischen den Nukleonen über die Oberflächenschwingungen vermittelt wurde. Diese Wechselwirkung sorgt dafür, daß sich die Gleichverteilung der Energie zwischen allen Nukleonen-Freiheitsgraden schnell einstellt. Bei der Anwendung dieses Modells auf ein bestimmtes Problem benutzen wir zunächst das Modell der unabhängigen Teilchen in der üblichen Weise und führen den Effekt der Oberfläche erst ein, wenn die Lebensdauer der Nukleonenzustände wichtig wird.

Wir wollen jetzt ein Problem betrachten, das sich sowohl mit dem Modell der unabhängigen Teilchen als auch mit dem Tröpfchen-Modell behandeln läßt, nämlich die (γ, n) -Reaktion. Dieses Problem wurde schon am Ende von Teil I erwähnt im Zusammenhang mit der Verbreiterung der Niveaus durch die Nukleon-Oberflächenwechselwirkung. Dabei war bei schweren Kernen die Lebensdauer eines Nukleonenzustandes explizit durch die Wahrscheinlichkeit der spontanen Emission eines Oberflächenquantes gegeben. Dieser (γ, n) -Prozeß spielt sich in unserem Modell folgendermaßen ab:

Durch Absorption eines γ -Quantes wird ein Nukleon von einem Zustand l in einen Zwischenzustand l' gebracht. Der angeregte Zustand l' geht durch Emission eines Oberflächenquantes im Zustand L, M zu einem Zustand l'' über, der im allgemeinen verschieden von dem Grundzustand sein wird. Die Energie des absorbierten γ -Quantes wird dann durch die Oberflächenschwingungen auf alle Freiheitsgrade des Kernes verteilt, und die Teilchen werden einen Gleichgewichtszustand erreichen. Nachdem das Gleichgewicht erreicht ist, zerfällt der Kern durch γ -Emission. Bei stärkerer Anregung erreicht das Nukleon-Fermi-Gas eine höhere Temperatur, die zur Verdampfung nach der Theorie von Weißkopf¹⁷ führen kann. Andere Prozesse können bei diesem Modell in ähnlicher Weise wie der (γ, n) -Prozeß behandelt werden.

Hiernach sollten γ -Quanten an Kernen im allgemeinen inkoherent gestreut werden, d. h. es entsteht ein „Kern-Raman-Effekt“ als eine Folge der Oberflächenschwingungen.

Die Behandlung des Problems der γ -Streuung (γ, n -Prozeß) mit diesem Modell sieht nach der obigen Diskussion zunächst etwas kompliziert aus. Aber es zeigt sich, daß mit der Einführung bestimmter Annahmen die Rechnung ganz übersichtlich wird. Wir vernachlässigen zuerst die Compton-Verschiebung, weil für (γ, n) -Prozesse bis zu 100 MeV $\hbar v/M c^2 \ll 1$ ist. Als nächstes betrachten wir die kohärenten Streuprozesse und berücksichtigen dann die Wirkung der Gesamtdämpfung Γ auf diese Streuprozesse. Es ergibt sich, daß der kohärente Streuquerschnitt sehr klein gegenüber dem Gesamtabsorptionsquerschnitt und daß der Gesamtabsorptionsquerschnitt für γ -Quanten proportional zur Gesamtdämpfung Γ ist. In die Gesamtdämpfung Γ gehen alle inelastischen Prozesse ein (z. B. Kern-Raman-Effekt, Erhitzung des Kerns usw.).

Da in die Gesamtdämpfung wesentlich die spontane Oberflächenemission eingeht, ist die Niveaubreite der Zwischenzustände keineswegs allein durch die übliche Strahlungsdämpfung gegeben. Für die Niveaubreiten angeregter mittelschwerer Kerne ist im Gegenteil nur diese Oberflächenemission wichtig. Daher beschreiben wir die „Niveau-Breite“ allein mit der Oberflächen-Emission. Das Problem haben wir damit auf eine solche Form gebracht, daß es mit dem Modell der unabhängigen Teilchen behandelt werden kann.

¹⁷ V. Weißkopf, Physic. Rev. **52**, 295 [1937].

Bevor wir mit unserer Rechnung beginnen, wollen wir die bisherigen Untersuchungen über die (γ , n)-Prozesse besprechen.

Experimentell wurde in letzter Zeit bei diesen Prozessen ein Maximum des Wirkungsquerschnittes in der Nähe von 20–30 MeV mit einer Breite von 4–6 MeV von verschiedenen Autoren beobachtet¹⁵. Dieses Maximum zeigt eine Abhängigkeit von der Massenzahl A , die in Abb. 2 aufgetragen ist.

Diese Abhängigkeit der Energie, bei der das Maximum des Gesamtquerschnittes liegt, vom Atomgewicht wurde von Goldhaber u. Teller¹⁵ sowie von Jensen u. Steinwedel¹⁶ als ein Resonanzeffekt gedeutet, der durch Dipolschwingungen von allen Protonen gegen alle Neutronen zustande kommt.

Goldhaber und Teller arbeiteten mit einem Modell, in dem die Protonen und Neutronen in ihrer Gesamtheit sich wie durchdringbare Kugeln benehmen, die gegeneinander Dipolschwingungen ausführen. Die rücktreibenden Kräfte kommen von der Oberfläche her. Das gibt eine relative Abhängigkeit der Resonanzfrequenz von A proportional zu $A^{-1/6}$.

Jensen und Steinwedel haben dieses Modell verändert, indem sie die oben erwähnten Dipolschwingungen hydrodynamisch behandeln. Hierbei schwingen die Neutron- bzw. Proton-Flüssigkeiten in einem Volumen, das durch die Oberfläche der Kerne „starr“ begrenzt wird. Die rücktreibenden Kräfte können aus dem Neutron-Proton-Exzeß-Term in dem Ausdruck für die Kernbindungsenergie entnommen werden.

Die hydrodynamische Behandlung führt zu einem Eigenwertproblem, aus dem sich die Resonanzfrequenz zu $\hbar\omega = 60 A^{-1/3}$ ergibt. Das ist in Abb. 2 aufgetragen, und man sieht, daß die relative Abhängigkeit von A sehr gut mit den experimentellen Werten übereinstimmt, daß aber die Absolutwerte ungefähr 30% zu klein sind. Jensen und Steinwedel erhalten auch eine typische Dispersionskurve. Die integrierten Querschnitte stimmen (von einem Faktor 2 abgesehen) mit den integrierten Querschnitten von Goldhaber und Teller überein.

In diesen phänomenologischen Modellen muß man die Dämpfung der Protonen-Neutronen-Flüssigkeitsbewegung durch eine Art innere Reibung erklären. Dadurch werden die geordneten Bewegungen in ungeordnete Bewegungen umgewandelt, der Tropfen wird aufgeheizt und gelangt zur Verdampfung. Da kaum zu erwarten ist, daß eine quantitative Behandlung der Dämpfung als Flüssigkeitsrei-

bung durchgeführt werden kann, entnehmen Jensen und Steinwedel die Werte für die Dämpfung ihrer Resonanzkurve dem Experiment.

Levinger und Bethe¹⁷ haben vom Standpunkt des Modells der unabhängigen Teilchen die Dipolübergänge betrachtet, wobei sie keine Spezialannahme über „Protonen-Neutron-Schwingungen“ wie in den obigen Modellen benutzt haben. Die integrierten photoelektrischen Wirkungsquerschnitte erhält man mit Hilfe der Summensätze, und diese stimmen mit den auf andere Weise erhaltenen Werten überein. Mittelwerte für γ -Absorption wurden auch gebildet, aber es ist keine Abhängigkeit von A gefunden worden, die mit dem Experiment übereinstimmt.

Wir werden ebenfalls mit dem Modell der unabhängigen Teilchen beginnen, aber die Rechnung etwas genauer durchführen als bei Levinger und Bethe und zeigen, wie die eben erwähnten Resonanzen (s. Abb. 2) zustande kommen können und wie in dem asymptotischen Grenzfall großer Kerne unsere Resultate mit den Resultaten des phänomenologischen Modells von Jensen und Steinwedel fast gleich werden. Die Erklärung der Dämpfung der Kernschwingungen in diesem Modell wurde bereits in Teil I gebracht. Den Gesamtprozeß kann man „Kern-Resonanz-Fluoreszenz mit Dämpfung durch die Oberflächenschwingungen“ nennen.

1. Allgemeines über γ -Querschnitte

Wir wollen jetzt die γ -Streuprozesse mit dem Modell der unabhängigen Teilchen, wie es im Rahmen der vorstehenden Diskussion beschrieben wurde, behandeln. In diesem Abschnitt werden wir dabei keine speziellen Annahmen über die auftretenden Matrixelemente machen. Wir betrachten *mehrere Teilchen* mit der Ladung e und Masse M in einem beliebigen Potentialtopf.

In einem System, bei dem die Koordinaten der Wellenfunktion der Nukleonen relativ zum Schwerpunkt betrachtet werden, haben, wie Bethe¹⁸ gezeigt hat, die Protonen eine äquivalente Ladung $e(N/A)$ und die Neutronen eine äquivalente Ladung $-e(Z/A)$.

Wir wollen jetzt das Dipolmoment des gesamten Kernes betrachten. Hierzu benutzen wir Wellenfunktionen $\psi(z_i, z_j)$, die Grundzustands- und angelegte Zustandsfunktionen des gesamten Kernes sind. Für das Modell der unabhängigen Teilchen

¹⁸ H. A. Bethe, s. Anm. 6, S. 222.

schreiben wir diese Funktionen als Produkte über die Ein-Teilchen-Wellenfunktionen der Protonen i und Neutronen j , wobei wir die Antisymmetrisierung später einführen.

$$\psi_n(z_i, z_j) = \prod_i \prod_j u_{ni}(z_i) u_{nj}(z_j). \quad (1)$$

Wir können jetzt das Matrixelement für das elektrische Dipolmoment des Gesamtkerne in den obigen Wellenfunktionen ausdrücken. Weil bei einem Übergang nur ein Teilchen seinen Zustand ändern kann, schreiben wir statt des Produktes Gl. (1) ein Matrixelement in folgender Form:

$$Z_{nn'} = \int \bar{u}_{n'}(Z) \left[\frac{N}{A} \sum_i z_i - \frac{Z}{A} \sum_j z_j \right] u_n(z) d\tau. \quad (2)$$

Darin schreiben wir \sum_i für die Summation über die Protonen-Koordinaten und \sum_j für die Summation über die Neutronen-Koordinaten. Wir führen dann die Oszillatorträge ein:

$$f_{nn'} = \frac{2M}{\hbar^2} (E_{n'} - E_n) |Z_{n'n}|^2. \quad (3)$$

Für den Wirkungsquerschnitt der kohärenten Streuung gilt die bekannte Formel^{19, 20}:

$$\sigma_{\text{Streu.}} = \frac{8\pi}{3} \frac{e^4 \omega^4}{c^4 M^2} \left[\sum_{n'} \frac{f_{nn'}}{(\omega_{n'} - \omega_n)^2 - \omega^2} \right]^2. \quad (4)$$

Dieser Querschnitt ist natürlich nur gültig für γ -Frequenzen, die weit von der Resonanz entfernt sind. Wenn die γ -Frequenz in der Nähe der Resonanz liegt, genügt, wie bekannt ist, die obige Störungsnäherung nicht mehr, und die Diracschen Differentialgleichungen müssen genauer gelöst werden.

Nach dem Wigner-Weißkopf-Verfahren erhält man für den gesamten Absorptionsquerschnitt unter Benutzung der Oszillatorträge:

$$\sigma_{\text{abs.}} = \frac{2\pi e^2}{M c} \sum_{n'} \frac{f_{nn'} \Gamma}{[(\omega_{n'} - \omega_n) - \omega]^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}, \quad (5)$$

wo Γ die *Totalwahrscheinlichkeit* für die spontane Emission eines γ -Quants ist. In unserem Fall ist Γ die Summe der elektromagnetischen Dämpfung und der Oberflächendämpfung. Im allgemeinen kann man die elektromagnetische Dämpfung gegen die Oberflächendämpfung vernachlässigen.

Die Resonanzstreuung ergibt sich aus Gl. (15) als

$$\sigma_{\text{Streu.}} = \frac{2\pi}{3} \frac{e^4 \omega^2}{c^4 M^4} \cdot \left| \sum_{n'} \left(\frac{f_{nn'}}{\omega - (\omega_{n'} - \omega_n) + i \frac{\Gamma}{2}} \right) \right|^2. \quad (6)$$

¹⁹ W. Heitler, Quantum Theory of Radiation, Oxford University Press 1936, S. 137—141.

Der Absorptionsquerschnitt setzt sich additiv aus den Beiträgen der einzelnen Zustände n' zusammen, nicht etwa der Streuquerschnitt.

Im allgemeinen sehen wir, daß die Auswertung des obigen Resonanzquerschnittes komplizierte Summationen über alle angeregten Zustände erfordert. An dieser Stelle wollen wir jetzt sehen, wie weit man mit Benutzung der *Summensätze* die Querschnitte oben explizit auswerten kann. In dieser Weise erhält man Resultate, die Aussagen über Dipol-Übergänge im allgemeinen ergeben.

Die bekannten Thomas-Reiche-Kuhn-Summensätze für Atomhüllen, die man leicht beweisen kann, lauten²¹:

$$\sum_{n'} f_{nn'} = Z. \quad (7)$$

Die Summe über alle Übergänge, die vom Grundzustand ausgehen, ist gleich der Anzahl Z von Elektronen.

Die Summe der Oszillatorträge wird:

$$\sum_{n'} f_{nn'} = \sum_{n'} \left(\frac{N}{A} \right)^2 |Z_{inn'}|^2 + \sum_{n'} \left(\frac{Z}{A} \right)^2 |Z_{jnn'}|^2. \quad (8)$$

Levinger und Bethe¹⁷ haben gezeigt, daß die Summe vergrößert wird, wenn die anziehenden Austauschkräfte zwischen Neutron-Protonen berücksichtigt werden. Wir werden aber diesen Effekt nicht in Betracht ziehen.

Wir können jetzt die Summation in der Heisenberg-Kramers-Formel im Grenzfall hoher Frequenzen ausführen und erhalten

$$\sigma_{\text{Streu.}} = \frac{8\pi}{3} \frac{e^4}{c^4 M^2} \left(\frac{NZ}{A} \right) = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \left(\frac{m}{M} \right)^2 \left(\frac{NZ}{A} \right)^2 \quad \text{und mit } N = Z = A/2$$

$$\sigma_{\text{Streu.}} = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \left(\frac{m}{M} \right)^2 \frac{A^2}{16}, \quad (10)$$

wo $8\pi/3 r_0^2 = 6,57 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2 = 0,657 \text{ barn}$ der Thomson-Querschnitt ist. Diese Formel stimmt mit den von Jensen und Steinwedel¹⁶ erhaltenen Resultaten bis auf einen Faktor 2, der von einem Rechenfehler bei Jensen und Steinwedel herstammt, über ein.

Ein anderer Fall, wo die Summe ausgeführt werden kann, ist der Absorptionsquerschnitt im Falle eines kontinuierlichen γ -Spektrums konstanter Intensität. Wenn man alle Primärfrequenzen summiert, erhält man in bekannter Weise den integrierten Querschnitt¹⁹:

²⁰ G. Wentzel, Hdb. d. Physik, **24/1**, S. 740—784 [1933].

$$\sigma_{\text{abs.}} = \frac{2 \pi e^2 \hbar}{M c} \sum_{n'} f_{nn'} = \frac{2 \pi e^2 \hbar}{M c} \left(\frac{N Z}{A} \right) \quad (11)$$

und mit $N = Z = A/2$

$$\sigma_{\text{abs.}} = \frac{\pi e^2 \hbar}{2 M c} \cdot A = 0,015 \text{ MeV barn.} \quad (12)$$

Das ist identisch mit den Resultaten von Bethe¹⁷ und stimmt auch überein mit Goldhaber und Teller¹⁵ sowie Jensen und Steinwedel¹⁶ (bis auf den eben erwähnten Faktor 2).

Wir haben gesehen, wie in einer sehr einfachen Weise in bestimmten Grenzfällen die Summation über die Oszillatorenstärken ausgeführt werden kann und Resultate erhalten wurden, die mit anderen Untersuchungen übereinstimmten.

Um über das Verhalten des Wirkungsquerschnittes mehr zu erfahren, ist es jetzt notwendig, ein spezifisches Modell einzuführen. In Abschn. 2 führen wir wieder wie in Teil I ein kugelsymmetrisches Potential ein und werten unsere Gleichung für dieses Potential aus.

2. Kernsummensätze in Kugelsymmetrie

Wir betrachten jetzt das Modell der unabhängigen Teilchen. Wir werden keine Annahme über die Form des Potentials machen außer der Kugelsymmetrie.

Die Ein-Teilchen-Wellenfunktionen im kugelsymmetrischen Potentialtopf lauten:

$$\Psi_{nlm} = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \Phi), \quad (13)$$

wo $Y_{lm}(\theta, \Phi)$ die normierte Kugelflächenfunktion, die in Teil I definiert wurde und $R_{nl}(r)$ die normierte Radial-Wellenfunktion ist.

Jetzt betrachten wir eine ebene und monochromatische elektromagnetische Welle ($\lambda > R$) und wählen die Polarisierung in der z -Richtung des Kerns. Die Gesamtwellenfunktionen werden wieder als Produkt von Wellenfunktionen Gl. (1) geschrieben. Die Antisymmetrisierung wird später in dem Niveauschema berücksichtigt werden. Unsere Dipol-Matrix reduziert sich wieder auf eine Matrix von Ein-Teilchen-Wellenfunktionen. Diese Dipol-Matrix schreiben wir

$$(n', l', m' | z | n, l, m) = \int \psi_{n'l'm'}^* \left[\left(\frac{N}{A} \right) \sum_i z_i - \left(\frac{Z}{A} \right) \sum_j z_j \right] \psi_{nlm} d\tau. \quad (14)$$

Wir wollen den Proton-Teil $\sum_i z_i$ zuerst allein behandeln, weil der Neutron-Teil sich nur durch den

Faktor (Z/A) unterscheidet. Wir schreiben jetzt für den Proton-Teil:

$$(n', l', m' | z_i | n, l, m) = \sum_i \frac{N}{A} \int_0^R R_{n'l'} R_{nl} r_i^3 d r_i \cdot \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} Y_{l'm'} Y_{lm} \cos \theta \sin \theta d\theta d\theta d\Phi. \quad (15)$$

Nach Einführung der Definition der Kugelflächenfunktionen

$$Y_{lm}(\theta, \Phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} P_{lm} e^{im\Phi}$$

ergibt sich die m -Auswahlregel sofort als $\Delta m = 0$. Die l -Auswahlregel ergibt sich in bekannter Weise zu $\Delta l = \pm 1$.

Mit diesen Auswahlregeln erhalten wir aus Gl. (3) folgende Matrix-Elemente:

$$(n', l+1, m | z_i | n, l, m)$$

$$= \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{(2l+3)(2l+1)}} (n', l+1 | r_i | n, l) \left(\frac{N}{A} \right), \quad (16)$$

$$(n', l-1, m | z_i | n, l, m)$$

$$= \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{(2l+1)(2l-1)}} (n', l-1 | r_i | n, l) \left(\frac{N}{A} \right). \quad (17)$$

Alle anderen Matrix-Elemente außer diesen sind gleich null. Die x - und y -Komponenten tragen nichts bei.

Die Radial-Matrix-Elemente Gl. (16) und Gl. (17) sind definiert als:

$$(n', l \pm 1 | r_i | n, l) = \sum_i \int_0^R R_{n', l \pm 1} R_{nl} r_i^3 d r_i. \quad (18)$$

Wir sehen, daß die einzige möglichen Übergänge die von l nach $l+1$ oder $l-1$ sind, wobei n sich beliebig ändern kann.

Wir wollen die Oszillatorenstärke finden. Dazu müssen wir zuerst die Quadrate der Gln. (15) und (16) bilden und dann über alle möglichen Orientierungen des Kerns, d. h. über alle m mitteln.

$$(n', l+1 | z_i | n, l)^2 = \frac{1}{3} \frac{l+1}{2l+1} (n', l+1 | r_i | n, l)^2, \quad (19)$$

$$(n', l-1 | z_i | n, l)^2 = \frac{1}{3} \frac{l+1}{2l+1} (n', l-1 | r_i | n, l)^2. \quad (20)$$

Die Oszillatorenstärke für den Proton-Teil ($\sum_i z_i$) Gl. (7) wird

$$f_i(n', l+1; n, l) = \frac{2M}{\hbar^2} (E_{n', l+1} - E_{n, l}) \cdot (n', l+1 | z_i | n, l)^2 \left(\frac{N}{A} \right)^2, \quad (21)$$

$$f_i(n', l-1; n, l) = \frac{2M}{\hbar^2} (E_{n', l-1} - E_{n, l}) \cdot (n', l-1 | z_i | n, l)^2 \left(\frac{N}{A}\right)^2. \quad (22)$$

Für die Oszillatorträge aller Nukleonen addieren wir denselben Ausdruck für die Neutronen, indem

$$f(n', l+1; n, l) = \frac{2M}{\hbar^2} (E_{n', l+1} - E_{n, l}) \frac{1}{3} \frac{l+1}{2l+1} \left[\left(\frac{N}{A}\right)^2 (n', l+1 | r_i | n, l)^2 + \left(\frac{Z}{A}\right)^2 (n', l+1 | r_i | n, l)^2\right]. \quad (23)$$

Für Übergänge ($l \rightarrow l-1$) gilt

$$f(n', l-1; n, l) = \frac{2M}{\hbar^2} (E_{n', l-1} - E_{n, l}) \frac{1}{3} \frac{l}{2l+1} \left[\left(\frac{N}{A}\right)^2 (n', l-1 | r_i | n, l)^2 + \left(\frac{Z}{A}\right)^2 (n', l-1 | r_i | n, l)^2\right]. \quad (24)$$

Wie gesagt, sind dies die „partiellen“ Oszillatorträge für Kerne mit Kugelsymmetrie.

Summensätze für die obigen partiellen Oszillatorträge findet man sehr leicht. Im Grundzustand eines Kerns sind für ein bestimmtes l alle zu diesem l -Wert gehörenden Niveaus bis zu einer maximalen Radial-Quantenzahl $n(l)_{\max}$ mit $2(2l+1)$ Teilchen besetzt. Mithin muß die Summe Gl. (23), (24) nicht nur über n' (angeregte Zustände) ausgeführt werden, sondern auch über alle als Grundzustand besetzten Niveaus n, l .

Um die Summe über n' auszuführen, benutzen wir die bekannten Summensätze für die partielle Oszillatorträge in Atomhüllen²¹:

$$\sum_n f_{n', l-1} = -(2l-1), \quad (25)$$

$$\sum_n f_{n', l+1} = (2l+3). \quad (26)$$

Die Summen beziehen sich auf alle Übergänge mit gegebenem (l), die vom Grundzustand ausgehen.

Die Summe der partiellen Oszillatorträge über n' wird (Protonen-Teil) mit Gl. (24)

$$\sum_{n'} f_i(n', l-1; n, l) = -2(2l+1)(2l-1) \frac{1}{3} \frac{l}{2l+1} \left(\frac{N}{A}\right)^2. \quad (29)$$

In ähnlicher Weise erhält man für ($l \rightarrow l+1$) mit Gl. (13)

$$\sum_{n'} f_i(n', l+1; n, l) = 2(2l+1)(2l+3) \frac{1}{3} \frac{l+1}{2l+1} \left(\frac{N}{A}\right)^2. \quad (30)$$

Also lautet die Gesamtsumme über die Oszillatorträge des Kerns Gl. (29) und Gl. (30):

²¹ H. A. Bethe, Hdb. d. Physik 24/1, 434 [1933].

wir (N/A) durch (Z/A) ersetzen. Die Ausdrücke Gl. (21), (22) sind „partielle“ Oszillatorträge, d. h. Oszillatorträge für Übergänge mit verschiedenen n' , aber mit einem bestimmten l . Die „partielle“ Oszillatorträge für Übergänge ($l \rightarrow l+1$) jetzt für Protonen und Neutronen ist

$$\sum_l \sum_n \sum_{m'} [f(n', l-1; n, l) + f(n', l+1; n, l)]. \quad (31)$$

Die Summation über n' in Gl. (31) kann jetzt ausgeführt werden mit Gl. (29), (30), und die Summe reduziert sich auf

$$\sum_l \sum_n \left[\left(\frac{N}{A}\right)^2 2(2l+1) + \left(\frac{Z}{A}\right)^2 2(2l+1)\right]. \quad (32)$$

Die Summe über n erhält man als

$$\left(\frac{N}{A}\right)^2 \sum_l n(l)_{\max} 2(2l+1) + \left(\frac{Z}{A}\right)^2 \sum_l n(l)_{\max} 2(2l+1). \quad (33)$$

Die Summe über l gibt im ersten Term die Anzahl Z der Protonen, im zweiten die Anzahl N der Neutronen. Also ist die Gesamtsumme

$$\left(\frac{N}{A}\right)^2 Z + \left(\frac{Z}{A}\right)^2 N = \frac{NZ}{A}. \quad (34)$$

Wir müssen jetzt den Einfluß des Pauli-Prinzips auf die Summensätze berücksichtigen. Weil alle Zustände bis zu einem maximalen Impuls besetzt sind, sind alle Übergänge zu Niveaus, die unter diesem Maximum liegen, verboten, d. h. es sind nur Übergänge zu Niveaus oberhalb des höchsten erlaubt. Da jedoch die Oszillatorenträge nach Gl. (18) antisymmetrisch ist,

$$f(n', l'; n, l) = -f(n, l; n', l'), \quad (35)$$

kann die Summation über die Zwischenzustände trotzdem über alle Niveaus, ob besetzt oder unbesetzt, erstreckt werden, weil dann die Übergänge zwischen besetzten Niveaus sich bei der Summation aufheben.

Wir können jetzt den Absorptionsquerschnitt Gl. (5) bei einem kugelsymmetrischen Topf in folgender Weise schreiben:

$$\sigma_{\text{abs.}} = \frac{2 \pi e^2}{Mc} \sum_{l=0}^{l_{\max}} \sum_{n=1}^{n_{\max}} \sum_{n'=1}^{\infty} \frac{\left[\left(\frac{N}{A} \right)^2 (f_{l+1} + f_{l-1})_i + \left(\frac{Z}{A} \right)^2 (f_{l+1} + f_{l-1})_j \right] \Gamma}{[\omega - (\omega_{n'} - \omega_n)]^2 + \left(\frac{\Gamma}{2} \right)^2}, \quad (36)$$

wobei die Abhängigkeit von f von n, n', l in den Gln. (29) u. (30) gegeben ist. Wir haben oben gezeigt, daß der Ausdruck (36) im Zähler allein summiert, zu den Summensätzen Gl. (34) führen würde. Hier steht jedoch der Nenner gleichzeitig in der Summe und die Auswertung Gl. (36) kann mit den oben abgeleiteten Summensätzen nur im Grenzfall höherer γ -Frequenzen (ω) erfolgen. Diese Grenzfallauswertung mit den Summensätzen wird in der weiteren Rechnung als Kontrolle wichtig sein. Die Oszillatorstärke kann man nämlich im allgemeinen nur näherungsweise explizit ausrechnen, was wir im folgenden für den Fall des unendlich tiefen Topfes tun werden. Diese f -Werte werden wir in die obige Summe einsetzen. Den Wert, der sich so für die Summe ergibt, werden wir zur Kontrolle verglichen mit dem Ausdruck Gl. (33), der ohne explizite f -Werte erhalten war. Wie bemerkt, ist diese Kontrolle nur im Grenzfall hoher Frequenzen möglich.

Das besonders einfache Modell des unendlich tiefen Topfes nehmen wir an, weil wir so eine gewisse Analogie zu den phänomenologischen Annahmen von Jensen und Steinwedel haben und unsere Resultate mit denen der genannten Autoren vergleichen können.

3. Ausrechnung der Oszillatorstärke und des Wirkungsquerschnittes

Wir wollen jetzt für einen unendlich tiefen Potentialtopf die Oszillatorstärke explizit ausrechnen. Wir werden zeigen, daß die Summe der näherungsweise erhaltenen Oszillatorstärken sehr schnell konvergiert, und daß die Summe mit dem ersten Term angenähert werden kann. Die Summe wird jetzt mit den Summensätzen verglichen und mit Berücksichtigung des Pauli-Prinzips in asymptotischer Form ausgerechnet.

Zuerst wollen wir die Matrix-Elemente Gl. (16), (17) für Dipolübergänge in einem *unendlich tiefen*

Topf finden. Die normierte Ein-Teilchen-Radialfunktion für diesen Topf lautet:

$$R_{nl}(kr) = N_l \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{l+\frac{1}{2}}(kr). \quad (37)$$

Die Matrix-Elemente Gl. (18) lauten, wenn wir jetzt die Summe über i durch die Anzahl der Protonen des Niveaus 2 ($2l+1$) ersetzen:

$$(n', l' | r_i | n, l) = 2(2l+1) \frac{\pi}{R} \sqrt{kk'} \int_0^R J_{l'+\frac{1}{2}}(k'r) J_{l+\frac{1}{2}}(kr) r^2 dr. \quad (38)$$

Obwohl wir die halbzahligen Bessel-Funktionen in geschlossener Form mit den trigonometrischen Funktionen ausdrücken können, wird die Integration umständlich, und wir gehen lieber zu einer asymptotischen Entwicklung über. Das ist eine vernünftige Annäherung, weil in den von uns betrachteten Fällen $kR > 1$ ist (mehrere Knoten im Topf). Die asymptotische Entwicklung lautet²²:

$$J_{l+\frac{1}{2}}(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \left[\sin \left(kr - \frac{\pi l}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{(l+1)!}{(l-1)!} \frac{1}{kr} \cos \left(kr - \frac{\pi l}{2} \right) - \frac{(l+2)!}{2(l-2)!} \frac{\sin \left(kr - \frac{\pi l}{2} \right)}{2(kr)^2} \dots \right]. \quad (39)$$

Das Restglied ist von der Größenordnung der vernachlässigten Terme. Bricht man mit dem ersten Glied ab, so wird es

$$\sim \frac{l(l+1)}{2kR} \quad \text{und} \quad \sim \frac{(l-1)l(l+1)(l+2)}{8kR}$$

für das Abbrechen mit dem zweiten Term. Man sieht, daß der Fehler mit l wächst.

Aus Gründen, die später klar gemacht werden, benutzen wir die ersten zwei Terme in der Entwicklung und führen die Integration in Gl. (38) aus. Zur weiteren Vereinfachung der Ergebnisse benutzen wir den asymptotischen Ausdruck für die Nullstellen der Bessel-Funktionen:

$$kR \rightarrow \pi \left(n + \frac{l}{2} \right).$$

Die Benutzung dieser Näherung führt natürlich zu schlechterer Übereinstimmung mit dem exakten Eigenwert für kleine Werte von n und große l .

²² G. N. Watson, Theory of Bessel Functions, 1922, S. 53, 199.

Die Matrix-Elemente in dieser asymptotischen Näherung lauten ($N = kR/\pi$) (40)

$$(n', l+1 | r | n, l) = R \left[\frac{4}{\pi^2} \frac{NN'}{(N'^2 - N^2)^2} - \frac{l(l+1)}{\pi^2} \frac{N'}{N(N'^2 - N^2)} + \frac{(l+1)(l+2)}{\pi^2} \frac{N}{N'(N'^2 - N^2)} + \dots \right], \quad (40)$$

$$(n', l-1 | r | n, l) = R \left[\frac{4}{\pi^2} \frac{NN'}{(N'^2 - N^2)^2} - \frac{l(l+1)}{\pi^2} \frac{N'}{N(N'^2 - N^2)} + \frac{l(l-1)}{\pi^2} \frac{N}{N'(N'^2 - N^2)} + \dots \right]. \quad (41)$$

Die gesamte Oszillatorstärke (Protonen und Neutronen) können wir mit Gl. (21), (22) bilden als

$$f(n', n, l) = \left(\frac{N}{A} \right)^2 \left[\frac{2}{3} (l+1) f_{l+1}(N, N') + \frac{2}{3} l f_{l-1}(N, N') \right]_i + \left(\frac{Z}{A} \right)^2 \left[\frac{2}{3} (l+1) f_{l+1}(N, N') + \frac{2}{3} l f_{l-1}(N, N') \right]_j, \quad (42)$$

worin die erste Klammer für Protonen und die zweite für Neutronen gilt. Hierbei ist

$$f_{l+1}(N, N') = \frac{16}{\pi^2} \left[\frac{N'^2 N^2}{(N'^2 - N^2)^3} + \frac{(l+1)(l+2)}{2} \frac{N^2}{(N'^2 - N^2)^2} - \frac{l(l+1)}{2} \frac{N'^2}{(N'^2 - N^2)^2} + \dots \right], \quad (43)$$

$$f_{l-1}(N, N') = \frac{16}{\pi^2} \left[\frac{N'^2 N^2}{(N'^2 - N^2)^3} + \frac{l(l-1)}{2} \frac{N^2}{(N'^2 - N^2)^2} - \frac{l(l+1)}{2} \frac{N'^2}{(N'^2 - N^2)^2} + \dots \right]. \quad (44)$$

In der asymptotischen Form der Eigenwerte ist der erste angeregte Zustand $N' = N + \frac{1}{2}$. Wir sehen also, daß der erste Term Gl. (43), (44) die Größenordnung N hat, der andere Term aber nur von l abhängt. Der erste Term ändert sein Vorzeichen mit der Differenz $N' - N$, so daß bei der Summation von diesen Termen in erster Näherung nichts übrigbleibt. Aus diesem Grunde haben wir oben die zweite Näherung mitgenommen, die einen endlichen Beitrag liefert. Wir sehen auch, daß die Gln. (43), (44) antisymmetrisch sind, so daß das Pauli-Prinzip berücksichtigt ist.

Wir bemerken ferner, daß die Gln. (43), (44) in N' sehr schnell konvergieren. Schon der zweite Term in N' ist um einen Faktor 8 oder mehr kleiner als der erste. Das ist sehr günstig, weil wir uns jetzt bei Summation über N' mit dem ersten Term begnügen können, ohne die bisherige Näherung zu verschlechtern. Wenn wir die obigen Gln. (43), (44) über N' summieren, können wir diese Näherung mit dem Resultat in Gl. (29), (30) vergleichen.

Für die Summation der asymptotischen Ausdrücke über N' bei gegebenen (N) und (l) schreiben wir

$$\sum_{N'} f(N, N') = \sum_{N'=N+\frac{1}{2}}^{\infty} f(N, N') + \sum_{N'=N-\frac{1}{2}}^1 f(N, N'). \quad (45a)$$

Nach der obigen Diskussion ersetzen wir diese Summen durch die Hauptterme, und das gibt

$$\sum_{N'} f(N, N') \approx f(N, N + \frac{1}{2}) + f(N, N - \frac{1}{2}). \quad (45b)$$

In dieser Näherung erhalten wir für die Summation über N' in den Gln. (43) u. (44):

$$\sum_{N'} f_{l+1}(N, N') \approx \frac{16}{\pi^2} 2(l+1), \quad (45c)$$

$$\sum_{N'} f_{l-1}(N, N') \approx -\frac{16}{\pi^2} 2l. \quad (45d)$$

Es stimmen diese Ergebnisse für große l bis auf den Faktor $16/\pi^2$ mit den exakten Summen überein. Das genügt uns für unsere Zwecke, weil wir Resultate erhalten wollen, die mit dem Jensen-Steinwedel-Modell verglichen werden können, und das heißt, daß wir zu asymptotisch großen Kernen übergehen.

Wir betrachten jetzt $N = Z = A/2$, und die Oszillatorstärke vereinfacht sich zu:

$$f(N', N, l) = \frac{1}{3} (l+1) [f_{l+1}(N, N') + \frac{1}{3} l [f_{l-1}(N, N')]]. \quad (46)$$

Der Absorptionsquerschnitt wird aus Gl. (36):

$$\sigma_{\text{abs.}} = \frac{2\pi e^2}{Mc} \sum_l \sum_N \sum_{N'} \frac{f(N', N', l) \Gamma}{\left[\frac{\hbar \pi^2}{2MR^2} (N'^2 - N^2) - \omega \right]^2 + \left(\frac{\Gamma}{2} \right)^2}, \quad (47)$$

wo Γ als konstant betrachtet wird und ω_m aus Gl. (36) durch folgenden Ausdruck ersetzt ist:

$$\omega_m = \frac{\hbar}{2MR^2} (kR)^2 = \frac{\hbar \pi^2}{2MR^2} N^2. \quad (48)$$

Das ist jetzt der Absorptionsquerschnitt für asymptotisch große Kerne im Modell des unendlich tiefen Topfes. Bevor wir weitergehen mit der Aus-

führung der Summation ist noch folgendes zu erwähnen:

Für dies sehr einfache Modell haben wir uns natürlich beschränkt auf asymptotische Resultate. Aber wir sehen, wie man im Prinzip für jedes Modell den Querschnitt ausrechnen kann.

Man berechnet die Oszillatorstärke für ein bestimmtes Modell und stellt die Güte der Näherung fest durch Vergleich mit den Summensätzen im Grenzfall hoher γ -Frequenzen. Das Hauptproblem ist dann die Ausführung der Summation von Zähler und Nenner zusammen. Jeder Term der Summe gibt eine Resonanzkurve; diese superponieren sich in komplizierter Weise und ergeben eine Gesamtdispersionskurve, deren Form im allgemeinen verschieden von der normalen Resonanzkurve sein wird.

Wir wollen jetzt die einzelnen Summationen in Gl. (47) näher betrachten. Wir haben früher gezeigt, daß wegen der Güte der Konvergenz der Oszillatorstärkesummen in N' die Summe über N' durch den ersten angeregten Zustand ersetzt werden kann, d. h. $N' = N + \frac{1}{2}$. Als Folge des Pauli-Prinzips ist der einzige erlaubte Übergang der, der von dem höchsten besetzten Niveau ausgeht. Also $N' = N_{\max} + \frac{1}{2}$.

Die Summe über N führt über besetzte Niveaus und fällt nach dem Pauli-Prinzip auch weg. So bleibt nur eine endliche Summe über l übrig:

$$\sigma_{\text{abs.}} = \frac{2 \pi e^2}{M c} \sum_l \frac{f(N', N, l) \Gamma}{\left[\frac{\hbar \pi^2}{2 M R^2} (N'^2 - N^2) - \omega \right]^2 + \left(\frac{\Gamma}{2} \right)^2} \quad (49)$$

mit $N' = N_{\max} + \frac{1}{2}$.

Wir werden zuerst den Nenner ausrechnen. Die Resonanzenergie entsteht durch folgende γ -Energie:

$$\hbar \omega_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2 M R^2} (N'^2 - N^2) = \frac{9,26 \pi^2}{A^{\frac{2}{3}}} \left(N_{\max} + \frac{1}{4} \right); \quad (50)$$

N_{\max} entspricht dem Maximalimpuls, bis zu welchem der Kern aufgefüllt ist, und ist abhängig von der Anzahl der Protonen Z . Diese Abhängigkeit wurde in Gl. (33) benutzt bei Auswertung der Summensätze: $Z = \sum n(l)_{\max} 2(2l+1)$, d. h.

$$\frac{Z}{2} = N + 3(N-1) + 5(N-2) + \dots + 7(N-2) + 9(N-2) + \dots \quad (51)$$

Wir sehen leicht, daß dann (für große N)

$$\frac{Z}{2} \approx 1,32 N_{\max}^3 \quad (52a)$$

und mit $N = Z = \frac{A}{2}$, daß $N_{\max} \approx \frac{A^{\frac{1}{3}}}{1,73}$. (52b)

Die Resonanzenergie wird ($R = 1,5 \cdot 10^{-13} A^{\frac{1}{3}}$)

$$\hbar \omega_0 \approx \frac{9,26 \pi^2}{A^{\frac{2}{3}}} \frac{A^{\frac{1}{3}}}{1,73} \approx 53,3 A^{-\frac{1}{3}}. \quad (53)$$

Jensen und Steinwedel erhalten

$$\hbar \omega_0 \approx 60 A^{-\frac{1}{3}} \quad (54)$$

mit dem Kernradius ($R = 1,42 \cdot 10^{-13} A^{\frac{1}{3}}$). Wenn wir diesen Kernradius in Gl. (50) benutzen, so finden wir

$$\hbar \omega_0 \approx 59,5 A^{-\frac{1}{3}}. \quad (55)$$

Unsere asymptotische Näherung entspricht also erstaunlich gut dem phänomenologischen Modell von Jensen und Steinwedel. Diese Übereinstimmung ist jedoch zufällig, denn tatsächlich sind die Modelle etwas verschieden. Das Jensen-Steinwedel-Modell berücksichtigt die Korrelationsbindung der Nukleonen, es setzt nämlich eine spezielle Kollektivbewegung des Kernes unter Wirkung des äußeren Feldes voraus (Änderung des Dichteverhältnisses von Protonen zu Nukleonen unter Konstanzhaltung der Gesamtdichte). Wir benutzen andererseits das Modell der unabhängigen Teilchen, in dem sich bei der Anregung durch ein γ -Quant nur die kinetische Energie eines Teilchens ändert; das Modell enthält keine Korrelationsenergie. Andererseits sind die Modelle ähnlich in der Hinsicht, daß Jensen-Steinwedel starre Wände benutzen, was unserem unendlich tiefen Topf entspricht.

Wir können aber den Beitrag der Korrelationsenergie (Effekt 2. Ordnung) in unserem Modell auch in einfacher Weise abschätzen. Zu diesem Zweck schreiben wir die Korrelationsenergie für den Grundzustand wie folgt:

$$E_0^{(2)} = \frac{|H_{01}|^2}{E_0 - E_1} + \sum_{\sigma} \frac{|H_{0k}|^2}{E_0 - E_k} \quad (56a)$$

und für den ersten angeregten Zustand:

$$E_1^{(2)} = \frac{|H_{01}|^2}{E_1 - E_0} + \sum_{\sigma} \frac{|H_{1k}|^2}{E_1 - E_k}. \quad (56b)$$

Es ist dann klar, daß der erste Term Gl. (56a) eine *negative* Korrektion zum Grundzustand, der erste Term Gl. (56b) eine *positive* Korrektion zum ersten angeregten Zustand liefert; man darf wohl annehmen, daß die höheren Terme weniger zur Korrelationsenergie beitragen (vgl. S. 518). Die Berücksichtigung der Korrelationsenergie führt also zu einer *Vergrößerung* der Energiedifferenz zwischen Grund-

zustand und erstem angeregten Zustand. Die Größe dieser Verschiebung hängt natürlich von H_{ik} ab und damit vom Ansatz für die Kernkräfte. Um ganz konsequent in unserem Modell (Teil I) zu bleiben, müßte man die Wechselwirkung mit der Oberfläche für H_{ik} einsetzen. Die Korrelationsenergie führt also zu einer Erhöhung der Resonanzfrequenzen in unserem Modell.

Die im Jensen-Steinwedel-Modell benutzte Korrelationsbindung entspricht, wie oben erwähnt, nicht der gesamten Korrelation. Die Annahme dieser Autoren, daß bei der Proton-Neutron-Bewegung die Dichte konstant bleibt, beschränkt die Kollektivbewegung wesentlich.

Die Berechnung der Resonanzfrequenzen, welche bekanntlich durch die rücktreibenden Kräfte bestimmt sind, folgt bei Jensen und Steinwedel einfach aus $\omega \sim \sqrt{\frac{k}{M}} \sim \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{M}}$, wo ε_2 der Asymmetrieterm ist, der in der Weizsäcker-Bethe-Formel für die Bindungsenergie steht:

$$\varepsilon = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \left(\frac{N-Z}{A} \right)^2 + \dots \quad (56c)$$

Jensen und Steinwedel benutzen den empirischen Wert für $\varepsilon_2 \approx 20$ MeV, erhalten aber trotzdem etwas zu kleine Resonanzfrequenzen, was vielleicht auf ihre Beschränkung auf konstante Dichte zurückzuführen ist.

Im Modell der unabhängigen Teilchen würde andererseits der entsprechende Wert für ε_2 direkt aus der Entwicklung für die kinetische Energie eines Fermi-Gases

$$\varepsilon = \frac{3}{5} \varepsilon_{\max} \left[1 + \frac{5}{9} \left(\frac{N-Z}{A} \right)^2 \right] \quad (56d)$$

folgen; denn hier könnte die potentielle Energie nur zu dem Term ε_1 beitragen, und die Korrelationsenergie fehlt völlig.

Wir sehen, daß ein Fermi-Gas (Modell der unabhängigen Teilchen) ohne Korrelationsenergie einen Wert für $\varepsilon_2 \approx 8$ MeV liefert. Der empirische Wert ist $\varepsilon_2 \approx 20$ MeV, was den starken Einfluß des potentiellen Teils der Korrelationsenergie deutlich macht. Wir folgern also, daß die Berücksichtigung der Korrelationsenergie die Resonanzfrequenzen um einen Faktor der ungefähren Größe $\sqrt{\frac{20}{8}} \approx 1,6$ erhöhen würde. Der Einfluß der oben angeschriebenen Glieder 2. Ordnung ist also ziemlich groß, wie schon früher von Euler²³ bemerkt worden ist.

²³ H. Euler, Z. Physik 105, 553 [1937].

Unter Hinzunahme eines Faktors $\sim 1,3$ bis $1,6$ würden die theoretischen Werte von Gl. (53) die beobachteten Resonanzfrequenzen sehr gut darstellen.

Dieses Ergebnis für die Resonanzfrequenzen ist ohne Faktor in Abb. 1 u. 2 im Vergleich mit experimentellen Werten aufgetragen.

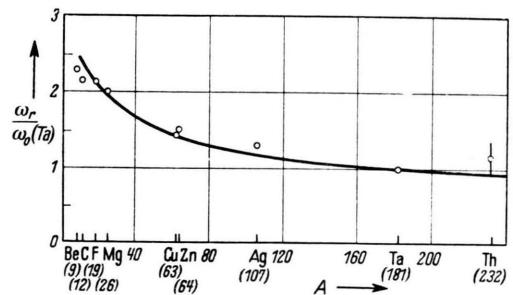


Abb. 1. Relativwerte der Resonanzfrequenzen ($\hbar\omega_0$) für (γ, n) gegen Massenzahl A bezogen auf Ta^{181} (experimentelle Werte \circ).

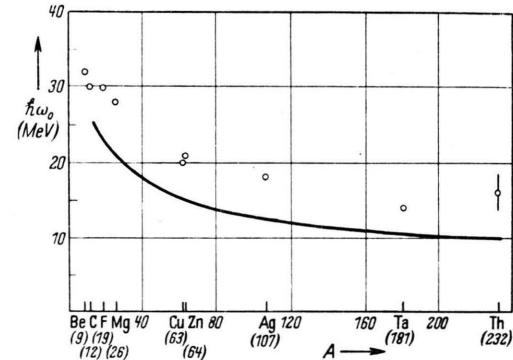


Abb. 2. Absolutwerte der Resonanzfrequenzen ($\hbar\omega_0$) in MeV für (γ, n) gegen Massenzahl A aufgetragen (experimentelle Werte \circ), $R = 1,42 \cdot 10^{-13} A^{1/2}$, vgl. Gl. (53), (54), (55).

Wir sehen jetzt, daß in der hier benutzten asymptotischen Näherung alle Nenner gleich sind, weiter, daß die Summation über l sich einfach auf eine Summe über die Zähler reduziert. Über die Abweichung von diesem Sachverhalt bei genauerer Rechnung wird später gesprochen werden.

Nach Gl. (46) hat der Zähler folgende Form:

$$\begin{aligned} & f(N', N, l) \\ &= \frac{1}{3} (l+1) [f_{l+1}(N, N') + \frac{1}{3} l [f_{l-1}(N, N')]]. \quad (57) \end{aligned}$$

Wenn man für die ersten angeregten Zustände $N' = N_{\max} + \frac{1}{2}$ setzt, werden die Gl. (43) u. (44):

$$\begin{aligned} & f_{l+1}(N, N') \\ & \approx \frac{16}{\pi^2} \left[N_{\max} + \frac{(l+1)(l+2)}{2} - \frac{l(l+1)}{2} + \dots \right], \quad (58) \end{aligned}$$

$$f_{l-1}(N, N') \approx \frac{16}{\pi^2} \left[N_{\max} + \frac{l(l-1)}{2} - \frac{l(l+1)}{2} + \dots \right]. \quad (59)$$

Also wird die Summe Gl. (57)

$$f(l, N) \approx \frac{1}{3} \frac{16}{\pi^2} [(2l+1)N_{\max} + 2l+1 + \dots] \quad (60)$$

und für die Summe über l erhalten wir (61)

$$\sum_l f(l, N) \approx \frac{1}{3} \frac{16}{\pi^2} \sum_l (2l+1) N_{\max}^{(l)} \approx \frac{1}{3} \frac{16}{\pi^2} \frac{Z}{2},$$

wo $N(l)_{\max}$ die Werte $N, N-1, N-2, \dots$ annimmt wie in Gl. (51), so daß die Summation sofort $Z/2$ ergibt.

Mit $N = Z = A/2$ erhalten wir für den Gesamtabsorptionsquerschnitt

$$\sigma_{\text{abs.}} \approx \frac{2\pi e^2}{Mc} \frac{A}{8} \frac{\Gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}, \quad (62)$$

worin ω_0 durch Gl. (54) gegeben und Γ in Teil I berechnet worden ist.

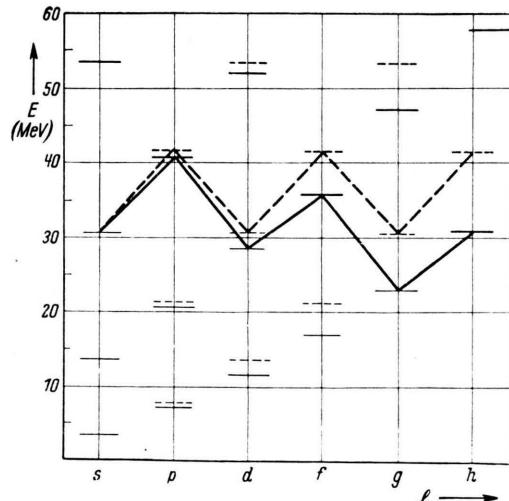
Wir erhalten also für die Summe im *asymptotischen Falle* eine Resonanzkurve. Diese Kurve Gl. (62) stimmt sehr gut überein (auch numerisch) mit dem von Jensen und Steinwedel angegebenen Absorptionsquerschnitt. Der Vergleich des hieraus folgenden integrierten Querschnitts mit dem auf Grund der Summensätze gewonnenen zeigt, daß in den Koeffizienten in Gl. (62) ein Faktor 2 fehlt. Das liegt hier sicher an der Ungenauigkeit der asymptotischen Näherung, bei Jensen und Steinwedel vermutlich an einem Rechenfehler.

Die obigen Resultate wurden mit Hilfe der asymptotischen Darstellung der Energieniveaus erhalten. Diese Darstellung weicht aber (auch schon bei großen Kernen) von den wirklichen Lagen der höheren Niveaus etwas, von den niedrigeren Niveaus vor allem bei großem l sogar stark ab. Dieser Sachverhalt ist in Abb. 3 dargestellt. Die Energieniveaus für Protonen sind hier exakt (ausgezogen) und asymptotisch (gestrichelt) eingezeichnet. Auf der Abszisse ist die Drehimpulsquantenzahl l und auf der Ordinate die Energie aufgetragen. Die Zahlen am rechten Rande der Figur bedeuten die Anzahlen der Protonen, die die Niveaus bis zu dem betreffenden N fortsetzen.

Es ist ein Kern mit $Z = 70, A \approx 140$ angenommen. Die dicken Striche bedeuten die besetzten Niveaus. Je nach dem Wert von l sind die asymptotischen Niveaus bis zu $E \approx 21-30$ MeV, die exakten Niveaus bis zu $E \approx 23-30$ MeV besetzt. Die höch-

sten besetzten Niveaus liegen oberhalb der normalen Fermi-Grenzenergie (≈ 24 MeV), die sich bei Rechnung mit ebenen Wellen ergeben würde.

Der Unterschied in den Übergängen für die asymptotischen und die exakten Niveaus ist ebenfalls dargestellt, jedoch nur für die ersten angeregten Zustände. Die Differenz zwischen den exakten und den asymptotischen Niveaus nimmt bei großen l stark mit l zu. Die eingezeichneten Übergänge lassen einen Vergleich zu zwischen der Energiedifferenz zweier exakter Niveaus und derjenigen der entsprechenden asymptotischen Niveaus. Für den hier dargestellten Kern sieht man, daß die Übergänge exakt \rightarrow exakt von den Übergängen asympt. \rightarrow asympt. abweichen ($< \pm 3$ MeV). Die Abweichungen liegen jedoch so, daß die exakten Energiedifferenzen in manchen Fällen größer ($l \rightarrow l-1$), in anderen Fällen kleiner ($l \rightarrow l+1$) als die entsprechenden asymptotischen Energiedifferenzen sind. Wir



Niveaus zueinander von der der exakten wenig abweicht. Die Spin-Bahn-Kopplung würde unsere Ergebnisse auch nicht wesentlich ändern, da nur Übergänge Spin parallel \rightarrow Spin parallel bzw. antiparallel \rightarrow antiparallel vorkommen. Die Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung verlangt, daß man einen Topf endlicher Tiefe benutzt. Die Energiedifferenzen bei solchen Übergängen sind daher nicht wesentlich verschieden von den entsprechenden Übergängen ohne Spin-Bahn-Kopplung.

Wir sehen also, daß das Modell der unabhängigen Teilchen mit einem unendlich tiefen Topf (für asymptotisch große Kerne) Resultate gibt, die ziemlich gut

mit dem phänomenologischen Flüssigkeitsmodell ohne spezielle Annahmen übereinstimmen. Also ist die Interpretation der (γ, n) -Prozesse als Resonanzvorgang in sehr gutem Einklang mit unserer Rechnung. Dazu haben wir bereits in Teil I erklärt, wie in diesem Modell die Wechselwirkung durch die Oberflächenschwingungen übertragen und die γ -Energie auf alle Freiheitsgrade verteilt wird, also wie die Dämpfung dieser Prozesse zustande kommt.

Ich danke Herrn Prof. W. Heisenberg für freundliche Aufnahme in seinem Institut sowie für wertvolle Ratschläge und viele interessante Diskussionen.

Zur Mikroreibung in Flüssigkeiten

Von A. SPERNOL und K. WIRTZ

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforschg. 8a, 522—532 [1953]; eingegangen am 25. Juni 1953)

Clemens Schaefer zum 75. Geburtstag gewidmet

Die Experimente zeigen für Teilchen von Moleküldimensionen Abweichungen von den Stokesschen Reibungsgesetzen. Sie können zwei Ursachen haben. Entweder werden die Stokesschen Gesetze durch die Struktur der Flüssigkeit modifiziert, die Reibung bleibt aber durch die Viskositätskonstante und geometrische Daten allein bestimmt, oder es kommen Bewegungsmechanismen ins Spiel, die nichts mit dem viskosen Prozeß zu tun haben. Beide Einflüsse können empirisch durch einen „Mikroreibungsfaktor“ berücksichtigt werden, mit dem das Stokessche Gesetz zu erweitern ist. Für große Radien muß er den Wert 1 annehmen. Für kleine Radien kann aus dem experimentellen Material für Translations- und Rotationsbewegungen der empirische Wert des Mikroreibungsfaktors in Abhängigkeit vom Radienverhältnis r/r_L des Gelösten und des Lösungsmittels bestimmt werden. Für neutrale kugelförmige Moleküle findet man für $r/r_L = 1$ aus Diffusionsmessungen den Mikroreibungsfaktor der Translation $\varrho_t \approx 0,6$, aus der Dipolorientierung den der Rotation $\varrho_r \approx 0,1$ bis 0,2. Beide zeigen erwartungsgemäß einen Anstieg mit wachsendem Radienverhältnis.

1. Formulierung des Problems

Führt eine starre Kugel mit dem Radius r in einer homogenen inkompressiblen Flüssigkeit mit der Viskosität η unter dem Einfluß der Kraft K eine Translationsbewegung mit der Geschwindigkeit v aus, so besteht nach Stokes zwischen der Reibungskonstanten ϱ_t der Translation und η die Beziehung

$$\frac{K}{v} \equiv \varrho_t = 6\pi\eta r. \quad (1)$$

Rotiert die Kugel unter dem Einfluß eines Drehmoments M mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$, so gilt entsprechend für die Reibungskonstante ϱ_r der Rotation

$$\frac{M}{\dot{\varphi}} \equiv \varrho_r = 8\pi\eta r^3. \quad (2)$$

Diese beiden Stokesschen Gleichungen, die für große Kugeln abgeleitet sind, gelten erfahrungsgemäß größtenteils auch noch für Teilchen von molekularen Dimensionen. In diesem Fall erhält man die Reibungskonstanten z. B. aus der Diffusionskonstanten D , der Ionenbeweglichkeit u , oder, im Falle der Rotation, aus der Relaxationszeit τ der Orientierung:

$$\varrho_t = \frac{kT}{D}, \quad \varrho_r = \frac{zeE}{u}, \quad \varrho_r = 2kT\tau. \quad (3)$$

Die bekannten Gesetzmäßigkeiten vom Typus $D \cdot \eta = \text{const} \cdot T$, $u \cdot \eta = \text{const}$ und ähnliche stellen Bestätigungen der Stokesschen Auffassung für Moleküle dar. Sie zeigen folgendes: a) Der viskose Bewegungsprozeß, der den Stokesschen Gleichungen zugrunde liegt, wirkt auch im molekularen Bereich,